* 1. 定义和示例 2020年12月22日14点07分

**定义1.1.1** **度量空间**是一个对,其中是一个集合,是一个函数,称为**度量[metric]**,它对于中的所有都满足以下属性:

;

当且仅当;

(三角形不等式).

**定理1.1.3** 令是中的两个向量,令符号是它们之间的内积,则对于任意实数,下列(不)等式恒成立:

定理1.1.4(Cauchy-Schwarz不等式) 如果和是中的向量,则

推论1.1.5 如果定义为

则是一个度量.

当且时,我们引入符号

集合称为半径为的围绕或以为中心的开球;称为半径为的的闭球.如果,则是开区间,而是闭区间.如果,则是所谓的中心半径的“开放”圆或圆盘,不包括边界圆,而是相应的“闭合”包含边界圆的圆盘.同时,请注意,当时,.这项琐碎的观察会派上用场.

定义1.1.6 如果是一个度量空间,令是的子集,如果中的每个都存在一个使得,则是**开集**.的子集是**闭合的**仅当其补集是开集.

**命题1.1.8** 令为度量空间,令为的子集.

的子集在中是相对开放的当且仅当X中存在一个开集U使得.

的子集在中是相对闭合的当且仅当X中存在一个闭集D使得.

命题1.1.9 如果是一个度量空间而,则

命题1.1.10 (a)如果是开放集合,则是开集.(b)如果是开集的集合,则是开集.

命题1.1.11 (a)如果是闭集,则是闭集.(b)如果是闭集的集合,则是闭集.

定义1.1.12 设为的子集.A的内部[interior],用表示,是由下列定义的集合

A的**闭包[closure]**,标记为,定义如下

A的边界[boundary],标记为,定义为

命题1.1.13 令.

当且仅当存在一个使得.

当且仅当存在一个使得.

命题1.1.15 设A为X的子集.

A是闭集当且仅当.

A是开集当且仅当.

,并且.

如果是X的子集,则.

定义1.1.16 如果和是两个度量标准空间，则通过下列公式定义新的度量空间

其中,.

**命题1.1.17** 采用先前给定的符号.

如果在中是开集,则在中是开集.

如果在中是闭集,则在中是闭集.

如果在中开放并且,则存在使得.

**定义1.1.18** 度量空间的子集是**密集的[dense]**仅当.如果度量空间具有可数的密集子集,则它是**可分离的**.

命题1.1.20 集合在中是密集的当且仅当对于中的每个和每个,使得.

* 1. **序列和完整性** 2020年12月29日09点49分

**定义1.2.1** 令是中的一个序列,如果对于每一个始终存在一个整数使得当时,恒成立,则我们说**收敛**至.用符号表示为或.

**命题1.2.3** 令是的子集,是中的一个序列且,是闭集当且仅当.

**定义1.2.4** 令,如果对于每一个,始终存在一个点满足条件,则点被称为的**极限点**.

这里的重点是,无论我们取多小,我们都可以找到不同于但属于的点.并不需要必须属于才能使它成为于的极限点(稍后会详细介绍).如果不是A的极限点,但是属于A,则称为的**孤立点[isolated point]**.

**命题1.2.6** 如果属于且是一个子序列,则.

**命题1.2.7** 令是度量空间的子集.(**证明过程需要看懂**)

1. 点是的极限点当且仅当A中存在不同点的序列且收敛至x.
2. 是一个闭集当且仅当它包含它所有的极限点.
3. .

**定义1.2.8** 如果和,则到的**距离**为

显然,当时,.但是,如我们现在所见,当该点不在集合中时,从点到集合的距离可能为0.

**命题1.2.9** 如果,则.

**定义1.2.10** 令是中的一个序列,如果对于每一个始终存在一个整数使得当时,恒成立,则我们说是**柯西序列**.如果每一个柯西序列收敛,则度量空间是**完整的**.

很容易看出,在任何度量空间中,每个收敛序列都是柯西序列.实际上,如果并且,则选择使得.因此,当时,.因此,完整度量空间是那些收敛和柯西序列相同的度量空间.当空间完整时,柯西概念的优点在于,你知道极限存在,而不必产生作为极限的点.

**命题1.2.11** 如果是柯西序列,并且的某些子序列收敛到,则.(**证明过程需要看懂**).

对于任何集合E,将其**直径**定义为

很容易看出.

**定理1.2.12(康托定理)** 一个度量空间是完整的当且仅当非空子集序列是满足下列条件:

1. 每一个是闭集;
2. ;
3. 如果,则是一个单个点.

**命题1.2.14** 如果是是一个完整的度量空间且,则是完整的当且仅当在中是闭集合.(可以看作是**定理1.2.12**的推论)

**定义1.2.15** 令是的子集,如果,则我们说是**有界的**.

**命题1.2.16**(**证明过程需要看懂**)

1. 的子集A被称为有界的当且仅当对于任意,存在一个使得.
2. 有限数量的有界集合的并集是有界的.
3. 中的柯西序列是有界集合.
   1. 连续性 2021年1月5日10点25分

定义1.3.1 如果和是两个度量空间,令是一个函数,如果对于每一个始终存在一个使得当时,恒成立,则函数是在点处是**连续的**.如果在X的每一个点处连续,则它被称为**连续函数**.

命题1.3.2 如果和是两个度量空间,令是一个函数,则函数在点是连续的当且仅当如果中存在一个序列且时,Z中恒成立.(证明过程需看懂)

定理1.3.3 如果和是度量空间令,则以下命题等效.

f是X上的连续函数.

如果是的开放子集,则是的开放子集.

如果是的封闭子集,则是的封闭子集.

命题1.3.5 如果是一个度量空间且,则

对所有的成立.(证明过程很简单)

推论1.3.6 如果是的非空子集,则由定义的是连续函数.

命题1.3.7 如果是一个度量空间,并且和是从到的连续函数,则和是连续的,其中和对于中的所有.如果对于中的所有,则由定义的是一个连续函数.

命题1.3.8 两个连续函数的组合也是连续的.

定理1.3.9(乌雷森的引理) 如果和是的两个不相交的闭合子集,则存在一个连续函数具有以下属性:

对所有成立;

对所有成立;

对所有成立.

定义为

即满足上述三个条件.

推论1.3.10 如果是的封闭子集并且是包含的开放集,则存在一个连续函数使得X中的所有都满足,当时,当时.

定义1.3.11 如果和是度量空间,令是一个函数,如果是双射的并且和都是连续的,则映射被称为**同胚[homeomorphism]**.如果从一个度量到另一个度量存在同胚关系,则两个度量空间被称为同胚空间.

定义1.3.12 如果是一个集合,则如果两个度量和定义相同的收敛序列,则称它们**等价[equivalent]**.如果恒等映射是同胚的,则等价地,和是等价.

命题1.3.13 对于任意度量空间

定义了一个等价度量.

定义1.3.15 令是量个度量空间之间的函数,如果对于每一个始终存在一个,当时使得,则函数被称为**均匀连续**.

命题1.3.17 (a)如果是均匀连续函数,并且是中的柯西序列,则是中的柯西序列.

(b)如果是一个完整的度量空间,并且是均匀连续的,则可以扩展为均匀连续函数.

* 1. **紧性** 2021年1月12日09点38分

如果是子集的集合且,则当时,是的**覆盖[cover]**.的**子覆盖**是的子集,它也是的覆盖.最后,我们说,如果是覆盖并且集合中的每个集合都是开集,则是的**开覆盖**.

定义1.4.1 度量空间的子集K是**紧凑[compact]**仅当的每一个开覆盖具有有限子覆盖.

很容易找到非紧凑集合的示例.例如,开区间并不紧凑,因为如果我们令,则是区间的开覆盖,但具有无穷子覆盖.类似地,不是紧凑的,因为是的开覆盖,但具有无穷子覆盖.我们可以很容易地看到的每个有限子集都是紧凑的,但是找到紧凑集的非平凡的例子需要我们首先证明一些结果.

命题1.4.2 令为一个度量空间.(**子命题(3)的证明需要看懂**)

1. 如果是的紧凑子集,则是闭集且有界.
2. 如果是紧凑的并且是包含在中的闭集,则是紧致的.
3. 紧凑子集的连续图像是紧凑子集.

推论1.4.3 如果是一个紧凑的度量空间,并且是一个连续函数,则中存在点和使得中所有满足.

定义1.4.4 令是度量空间的一个子集,如果对于任意半径存在中的一些点使得,我们称是**完全有界[totally bounded]**.的子集集合具有**有限相交属性[finite intersection property]**(FIP)仅当.

**定理1.4.5** 令是度量空间的一个闭子集,下列命题是等价的.(**证明过程比较复杂,需要结合前面的知识才能看懂**)

1. 是紧凑的.
2. 如果是的闭子集集合且具有FIP,则.
3. 中的每个序列都有一个收敛的子序列.
4. 的每个无限子集都有一个极限点.
5. 是一个完全有界的完整度量空间.

**引理1.4.7** 如果中的,则是紧凑的.

**定理1.4.8(Heine-Borel定理)** 的子集是紧凑的当且仅当它是闭集且有界.

请注意,Heine-Borel定理中用于的度量必须是标准度量,否则即使使用等效度量也可能导致结果失败.例如,如果在上使用度量,则所有都是封闭且有界的,但不是紧凑的.(**这里没看懂,经过验证,它是紧凑的**)

**定理1.4.10** 如果是一个紧凑的度量空间并且是一个连续函数,则是均匀连续的.(**证明需要看懂**)

**命题1.4.11** 紧凑的度量空间是可分离的.(**证明需要看懂**)